

CHƯƠNG III: GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

I. GÓC Ở TÂM – SỐ ĐO CUNG

1. Góc ở tâm.

- Góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn gọi là góc ở tâm. Hai cạnh của góc cắt đường tròn tại hai điểm chia đường tròn thành hai cung.
- Cung nằm bên trong góc gọi là cung nhỏ, cung nằm bên ngoài góc gọi là cung lớn.

VD: Ở Hình 1:

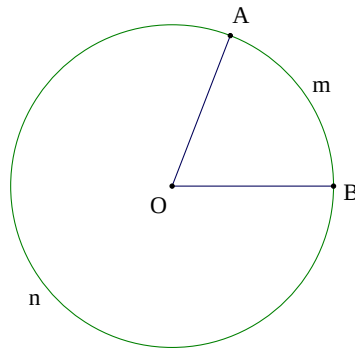
Góc AOB là góc ở tâm.

Cung nhỏ là cung $\widehat{AmB}$.

Cung lớn là cung $\widehat{AnB}$.

Hoặc ta có cách nói khác: Góc AOB chắn cung $\widehat{AmB}$.

Chú ý: Góc bẹt chắn nửa đường tròn.



Hình 1

2. Số đo góc ở tâm.

+ Số đo của cung nhỏ bị chắn bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

+ Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ.

+ Số đo của nửa đường tròn bằng 180°

+ Chú ý:

- Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180°

- Cung lớn có số đo lớn hơn 180°

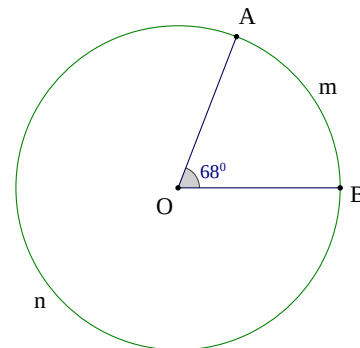
VD:

Ở Hình 2:

Góc $AOB = 68^\circ \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AmB} = 68^\circ$.

Từ đó: $\text{sđ } \widehat{AnB} = 360^\circ - 68^\circ$

Chú ý: Hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.



Hình 2

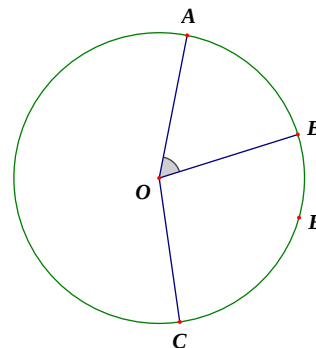
3. Định lí: Điểm nằm giữa cung

❖ B nằm giữa cung AC

$$\Rightarrow sđAC = sđAB + sđBC$$

❖ B là điểm chính giữa cung AC

$$\Rightarrow sđAB = sđBC = \frac{1}{2} sđAC$$



II. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY CUNG

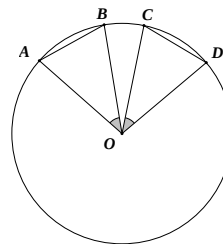
1. Định lí 1

Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

- Hai cung bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.
- Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn thì độ cung lớn hơn.

Ta có: $AB = CD$ (gt)

$$\Rightarrow sđAB = sđCD$$



$\Rightarrow \text{AOB} = \text{COD}$ (góc ở tâm cùng chắn 2 cung có số bằng nhau)

2. Định lí 2

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

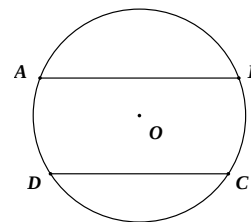
- *Cung lớn hơn thì dây lớn hơn.*
- *Dây lớn hơn thì cung lớn hơn.*

3. Bổ sung

a) Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.

Ta có: $AB \parallel CD$ (gt)

$\Rightarrow \text{sđAD} = \text{sđBC}$



b) Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.

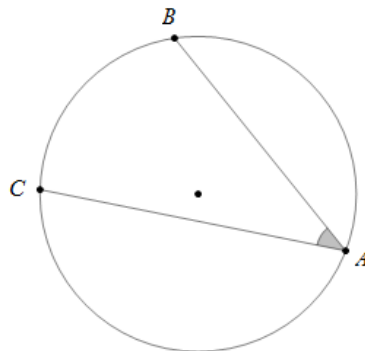
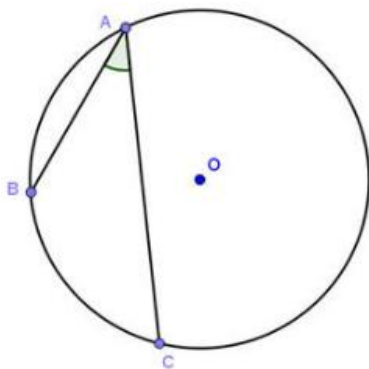
Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây (không đi qua tâm) thì đi qua điểm chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy.

c) Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

III. GÓC NỘI TIẾP

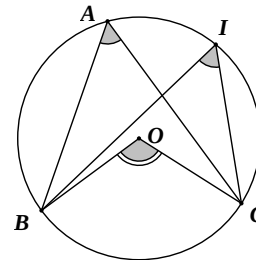
1. Định nghĩa

- + **Góc nội tiếp** là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó (BAC là góc nội tiếp chắn cung nhỏ BC)
- + Cung nằm bên trong góc gọi là cung bị chắn (BC gọi là cung bị chắn).



2. Số đo: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng một nửa số đo của cung bị chắn.

Ta có: $\angle BAC = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BC}$ (góc nội tiếp (O) chắn cung BC)



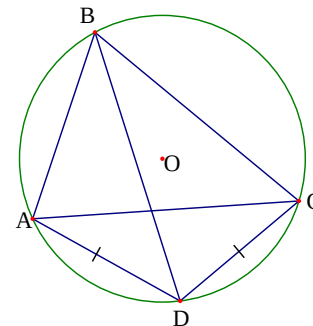
3. Trong một đường tròn:

* Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

Nếu $\angle ABD = \angle CBD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{CD} \Rightarrow AD = CD$

* Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

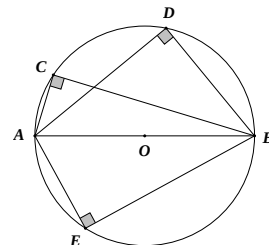
Trên hình vẽ: $\angle ABD = \angle ACD = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AD}$.



Trên hình vẽ: $AD = CD \Leftrightarrow \text{sđ} \widehat{AD} = \text{sđ} \widehat{CD} \Leftrightarrow \angle ABD = \angle ACD$

* Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là **góc vuông**.

Ta có: $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$ (góc nt chắn nửa đường tròn đường kính AB)



CÁC DẠNG BÀI TẬP VẬN DỤNG VỀ GÓC Ở TÂM – GÓC NỘI TIẾP

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O, R) và điểm M nằm ngoài đường tròn đó. Gọi MA, MB là hai tiếp tuyến với đường tròn tại A và B . Tính số đo của góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA và OB nếu:

- a) $\angle AMB = 70^\circ$
- b) $MA = R$
- c) $MO = 2R$

Hướng dẫn

Vì MA và MB là các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B nên: $MA \perp OA$, $MB \perp OB$

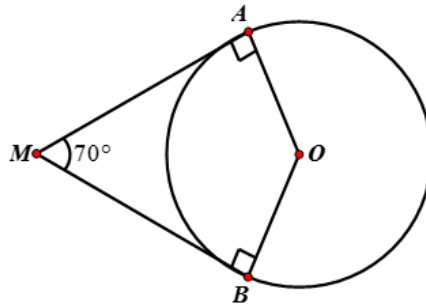
$$\Rightarrow \angle MAO = \angle MBO = 90^\circ$$

a) Xét tứ giác MAOB có:

$$\angle AMB + \angle AOB + \angle MAO + \angle MBO = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle AOB = 360^\circ - (\angle AMB + \angle MAO + \angle MBO) = 360^\circ - (70^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 110^\circ$$

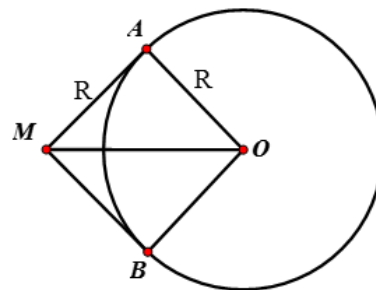
Vậy số đo góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA, OB bằng 110° .



b) Nếu $MA = R$

Xét $\triangle MAO$ có: $MA = AO = R$ và $\angle MAO = 90^\circ \Rightarrow \triangle MAO$ vuông cân tại $A \Rightarrow \angle MOA = 45^\circ$

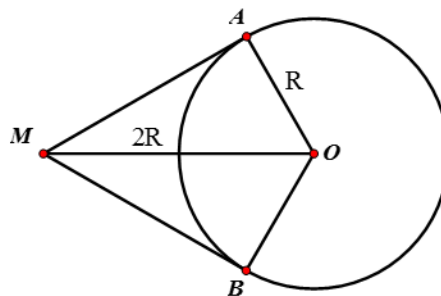
Vậy $\angle AOB = 2.\angle MOA = 90^\circ$



c) Nếu $MO = 2R$

Xét $\triangle MAO$ vuông tại A có: $MO = 2.AO \Rightarrow \angle AMO = 30^\circ \Rightarrow \angle AOM = 60^\circ$

Vậy: $\angle AOB = 2.\angle AOM = 120^\circ$



Ví dụ 2: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm A và B ($R < R'$). Kẻ đường kính BOC và $BO'D$.

a) Chứng minh rằng: Ba điểm C, A, D thẳng hàng.

b) So sánh số đo hai cung nhỏ AC và AD .

Hướng dẫn

a) Vì $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC nên $\triangle ABC$ vuông tại A hay $\angle BAC = 90^\circ$.

Tương tự ta có: $\angle BAD = 90^\circ$

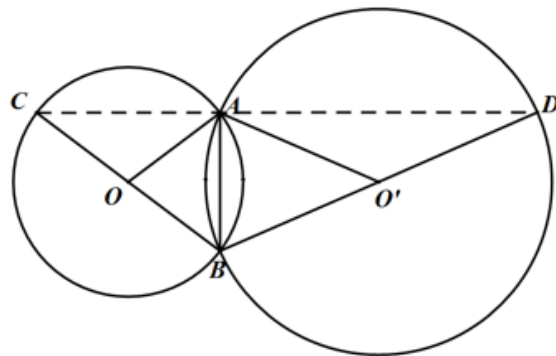
$$\Rightarrow \angle CAD = \angle BAD + \angle BAC = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ 3 điểm C, A, D thẳng hàng.

b) Xét đường tròn (O) có: $sđAC = 180^\circ - sđAB$

Xét đường tròn (O') có: $sđAD = 180^\circ - sđAB$

$$\Rightarrow sđAC = sđAD$$



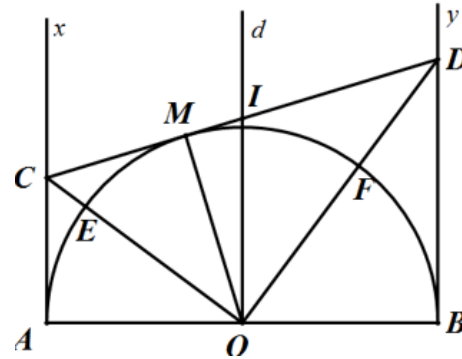
Ví dụ 3: Cho điểm M chuyển động trên nửa đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ hai tiếp tuyến Ax và By với đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại M với (O) cắt Ax tại C và cắt By tại D ; các đường thẳng CO và OD cắt (O) lần lượt tại E và F . Tính số đo $\angle EOF$.

Hướng dẫn

Vì CA và CM là hai tiếp tuyến với (O) nên OC là tia phân giác của $\angle AOM$.

Tương tự ta có OD là tia phân giác của $\angle BOM$ Mà $\angle AOM$ và $\angle BOM$ là hai góc kề bù $\Rightarrow OC \perp OD$

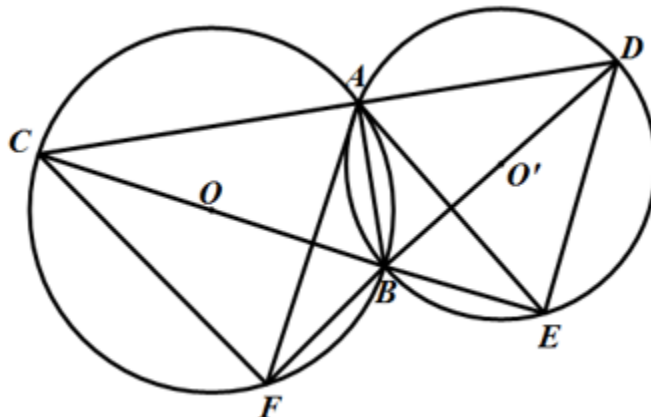
Vậy ta có $\angle COD = 90^\circ$ hay số đo $\angle E = 90^\circ$.



Ví dụ 4: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B. Vẽ cát tuyến CAD vuông góc với AB. Tia CB cắt (O') tại E, tia BD cắt (O) tại F. Chứng minh rằng:

- $\angle CAF = \angle DAE$
- AB là tia phân giác của $\angle EAF$
- $CA \cdot CD = CB \cdot CE$
- $CD^2 = CB \cdot CE + BD \cdot CF$

Hướng dẫn



Vì $CD \perp AB \Rightarrow \angle CAB = 90^\circ$ Mà $\angle CAB = 1/2 \text{ số } BC \Rightarrow \text{số } BC = 180^\circ$

Vậy ba điểm B, O, C thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có B, O', D thẳng hàng.

a) Chứng minh $\angle CAF = \angle DAE$

Trong (O) ta có: $\angle CAF = \angle CBF$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CF)

Trong (O') ta có: $\angle DAE = \angle DBE$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DE)

Mà $\angle CBF = \angle DBE$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \angle CAF = \angle DAE$.

b) AB là tia phân giác của $\angle EAF$

Nối CF và DE ta có: $\angle CFB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$$\angle BED = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O'))}$$

Xét $\triangle CFB$ và $\triangle DEB$ có:

$$\angle CFB = \angle BED = 90^\circ$$

$$\angle CBF = \angle DBE \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \angle FCB = \angle EDB$$

Mặt khác: $\angle FAB = \angle FCB$ (góc nội tiếp (O) cùng chắn cung FB)

$\angle EAB = \angle EDB$ (góc nội tiếp (O') cùng chắn cung EB)

$\Rightarrow \angle FAB = \angle EAB$ hay AB là phân giác của góc $\angle EAF$.

c) Chứng minh $CA \cdot CD = CB \cdot CE$

Xét $\triangle CAE$ và $\triangle CBD$ có:

$\angle C$ chung

$\angle CEA = \angle BDA$ (góc nội tiếp (O') cùng chắn cung AB)

$$\Rightarrow \triangle CAE \sim \triangle CBD \text{ (g.g)} \Rightarrow CA/CB = CE/CD \text{ hay } CA \cdot CD = CB \cdot CE \quad (1)$$

d) Chứng minh $CD^2 = CB \cdot CE + BD \cdot CF$

Chứng minh tương tự câu c) ta có: $DA \cdot DC = DB \cdot DF \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$CA \cdot CD + DA \cdot DC = CB \cdot CE + DB \cdot DF$$

$$\Leftrightarrow (CA + DA)CD = CB \cdot CE + DB \cdot DF$$

$$\Leftrightarrow CD^2 = CB \cdot CE + DB \cdot DF$$

Ví dụ 5: Cho đường tròn (O; R) và một điểm M bên trong đường tròn đó. Qua M kẻ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau (C thuộc cung nhỏ AB). Vẽ đường kính DE. Chứng minh rằng:

a) $MA.MB = MC.MD$.

b) Tứ giác ABEC là hình thang cân.

c) Tổng có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong đường tròn (O).

Hướng dẫn

a) Chứng minh $MA.MB = MC.MD$.

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle DMB$ có:

$$\angle ACD = \angle ABD \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung AD)}$$

$$\angle AMC = \angle BMD = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle DMB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow MA/MD = MC/MB \Rightarrow MA.MB = MC.MD$$

b) Chứng minh tứ giác ABEC là hình thang cân.

Vì $\angle DCE = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow CD \perp CE \quad CD \perp AB \text{ (gt)} \Rightarrow AB \parallel CE.$$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABEC là hình thang (1).

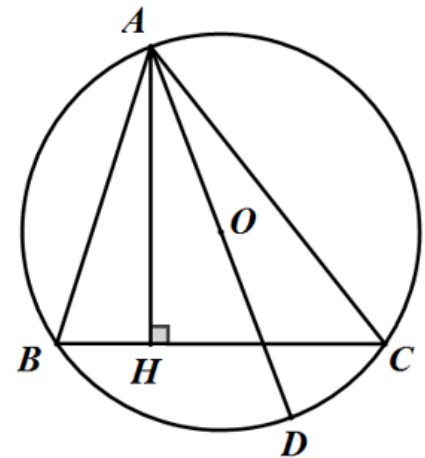
Mặt khác: CE và AB là hai dây song song của đường tròn (O) chắn hai cung AC và BE

$$\Rightarrow AC = BE \Rightarrow AE = BC \Rightarrow \angle ABE = \angle BAC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABEC là hình thang cân.

c) Tổng có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong đường tròn (O).

$$\text{Ta có } AE = BC \text{ (cmt)} \Rightarrow EA = BC.$$



Mặt khác: $\angle DAE = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\begin{aligned}\text{Do đó: } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= (MA^2 + MD^2) + (MB^2 + MC^2) \\ &= AD^2 + BC^2 = DE^2 = 4R^2 \text{ không đổi}\end{aligned}$$

Ví dụ 6: Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ AC. Tia AM cắt BC tại N. Chứng minh rằng:

a) $AB^2 = AM \cdot AN$

b) $\angle ACM = \angle ANC$

Hướng dẫn

a) Chứng minh $AB^2 = AM \cdot AN$

Vì $\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$

Lại có $\angle ACB = \angle AMB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$$\Rightarrow \angle ABN = \angle AMB$$

Do đó: $\triangle ABM \sim \triangle ANB$ (g.g) $\Rightarrow AB/AN = AM/MB$

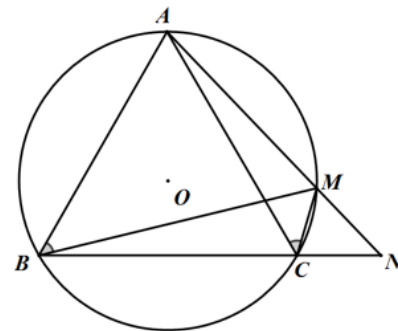
$$\Rightarrow AB^2 = AN \cdot AM$$

b) Chứng minh $\angle ACM = \angle ANC$

Vì $\triangle ABM \sim \triangle ANB \Rightarrow \angle ABM = \angle ANB$

Mà $\angle ABM = \angle ACM$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

Do đó: $\angle ACM = \angle ANC$



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$). Vẽ đường tròn (O) đường kính BC cắt AC, AC lần lượt tại E, F. Gọi H là giao điểm của BE và CF.

- a) Chứng minh: $AH \perp BC$.
- b) Chứng minh: $AF.AB = AE.AC$ và $BH.BE = BF.BA$ và $HE.HB = HF.HC$.
- c) AH cắt BC tại D. Chứng minh: D, H, E, C cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm I.
- d) Chứng minh: EH là tia phân giác của góc DEF.
- e) Chứng minh: FH là tia phân giác của góc DFE.
- f) AD cắt EF tại K. Chứng minh: $AK.HD = HK.AD$.
- g) EF cắt BC tại M. Chứng minh: $MF.ME = MB.MC$.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Đường cao BE, CF cắt nhau tại H.

- a) Chứng minh: $AH \perp BC$.
- b) AH cắt BC tại D. Chứng minh: $AF.AB = AH.AD = AE.AC$.
- c) AH cắt BC tại D. Chứng minh: B, F, E, C cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm I.
- d) Chứng minh: EH là tia phân giác của góc DEF.
- e) CF cắt DE tại K. Chứng minh: $FH.CK = HK.CF$.
- f) EF cắt BC tại M, EF cắt (O) tại N và T. Chứng minh: $MN.MT = ME.MF$.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Đường cao AD và BE cắt nhau tại H.

- a) Chứng minh: $CH \perp AB$.

- b) AD cắt (O) tại I. Chứng minh: $\triangle CHI$ cân.
- c) BE cắt (O) tại K. Chứng minh: H đối xứng với K qua AC.
- d) Chứng minh: $OC \perp IK$.
- e) Chứng minh: $ED \parallel KI$ và $OC \perp ED$.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Đường cao BE, CF cắt nhau tại H. BE, CF cắt (O) tại M và N.

- a) Chứng minh: $OA \perp MN$.
- b) Chứng minh: $MN \parallel EF$.
- c) Vẽ đường kính AD. Chứng minh: Tứ giác BHCD là hình bình hành.
- d) HD cắt BC tại K. Chứng minh: $AH = 2OK$.
- e) AH cắt (O) tại I. Chứng minh: $ID \parallel BC$.
- f) OK cắt (O) tại T. Chứng minh: AT là tia phân giác của góc IAD.

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Đường cao BE, CF cắt nhau tại H. AH cắt (O) tại I. Vẽ đường kính AD.

- a) Chứng minh: $ID \parallel BC$.
- b) Phân giác của góc BAC cắt (O) tại T. Chứng minh: AT là phân giác của góc HAO.
- c) Chứng minh: Tứ giác BHCD là hình bình hành.
- d) Chứng minh: H đối xứng I qua BC.
- e) Đường thẳng EF cắt BC tại K và cắt (O) tại M và N. Chứng minh: $KE.KF = KM.KN$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Phân giác của góc A cắt (O) tại P.

- a) Chứng minh: $\triangle PBC$ cân.
- b) Vẽ đường cao BE, CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AI. Chứng minh: Tứ giác BHCI

là hình bình hành.

c) HI cắt BC tại M. Chứng minh: 3 điểm O, M, P thẳng hàng.

d) Chứng minh: AP là phân giác của góc HAO.

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Phân giác của góc B cắt (O) tại M.

a) Chứng minh: $\triangle MAC$ cân.

b) BM cắt AC tại E. Chứng minh: $ME.MB = MC^2$.

c) Gọi F là trung điểm AC. Chứng minh: O, F, M thẳng hàng.

d) Vẽ dây MN // AB. Chứng minh: NC // BM.

e) Gọi I là giao điểm của MN và BC. Chứng minh: $IM = IB$ và $IN = IC$ và $MN = BC$.

f) Gọi K là giao điểm của MC và BN. Chứng minh: O, I, K thẳng hàng.

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ đều nội tiếp (O). E là điểm tùy ý trên BC. AE cắt (O) tại M.

a) Chứng minh: MA là phân giác của góc BMC.

b) Chứng minh: $AM.AE = AC^2$.

c) Trên AM lấy điểm D sao cho $MB = MD$. Chứng minh: $\triangle MBD$ đều và $BD // MC$.

d) Chứng minh: $MA = MB + MC$.

e) Vẽ đường kính AN. MN cắt BC tại F. Chứng minh: $BE.CF = CE.BF$.

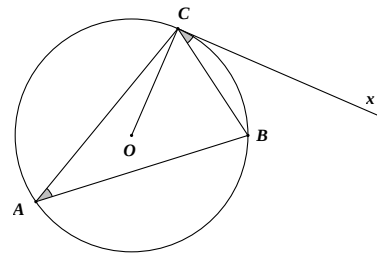
IV. GÓC TẠO BỞI TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

1. Định lí

Số đo của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

2. Hệ quả

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.



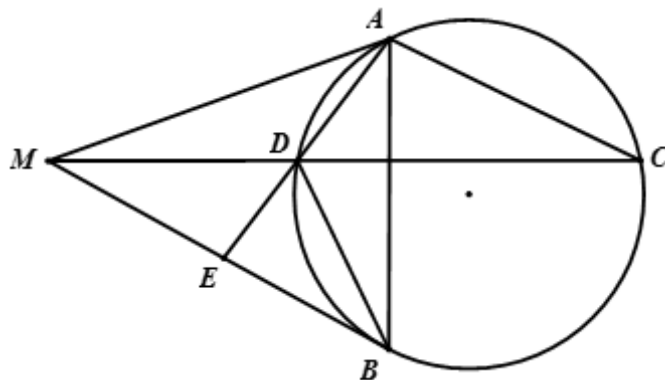
3. Định lí (bổ sung)

Nếu góc $B\hat{A}x$ (với đỉnh A nằm trên đường tròn, một cạnh chứa dây cung AB), có số đo bằng nửa số đo của cung AB căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn.

Ví dụ: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) tại A và B . Qua A vẽ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn tại C . Nối C với M cắt đường tròn (O) tại D . Nối A với D cắt MB tại E . Chứng minh rằng:

- $\triangle ABE \sim \triangle BDE$; $\triangle MEA \sim \triangle DEM$.
- E là trung điểm của MB .

Hướng dẫn



- Chứng minh $\triangle ABE \sim \triangle BDE$; $\triangle MEA \sim \triangle DEM$.

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle BDE$ có:

$\angle E$ chung

$\angle BAE = \angle DBE$ (góc nội tiếp và góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BD)

$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle BDE$ (g.g)

Vì $AC \parallel MB$ nên $\angle ACM = \angle CMB$ (so le trong)

Mà $\angle ACM = \angle MAE$ (góc nội tiếp và góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AD)

Suy ra: $\angle CMB = \angle MAE$

Xét $\triangle MEA$ và $\triangle DEM$ có:

$\angle E$ chung

$\angle MAE = \angle CMB$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle MEA \sim \triangle DEM$ (g.g)

b) Chứng minh E là trung điểm của MB

Theo chứng minh a) ta có: $\triangle ABE \sim \triangle BDE \Rightarrow AE/BE = BE/DE \Rightarrow EB^2 = AE \cdot DE$

$\triangle MEA \sim \triangle DEM \Rightarrow ME/DE = EA/EM \Rightarrow ME^2 = DE \cdot EA$

Do đó $EB^2 = EM^2$ hay $EB = EM$.

Vậy E là trung điểm của MB .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O), vẽ tiếp tuyến MA, MB.

- a) Chứng minh: $OM \perp BC$ tại H.
- b) Vẽ dây BC // AM. Chứng minh: $\triangle ABC$ cân.
- c) MC cắt (O) tại D. Chứng minh: $MA^2 = MD.MC$ và $AD^2 = DB.DM$
- d) AD cắt CB tại N. Chứng minh: $AB^2 = AD.AN$.
- e) Chứng minh: $ND.NA = NB.NC$.
- f) BD cắt AM tại I. Chứng minh: I là trung điểm của AM.

Bài 2. Cho (O) và điểm M nằm ngoài (O), vẽ tiếp tuyến MA, MB.

- a) Chứng minh: $OM \perp AB$ tại H.
- b) Vẽ dây BC // MA. Chứng minh: $\triangle ABC$ cân.
- c) MC cắt (O) tại D. Chứng minh: $MC.MD = MH.MO$.
- d) Chứng minh: $MHD = MCO$.
- e) Chứng minh: $AD^2 = DB.DM$.
- f) Gọi I là trung điểm của của AM. Chứng minh: B, D, I thẳng hàng.

Bài 3. Cho (O) và điểm M nằm ngoài (O), vẽ tiếp tuyến MA, MB.

- a) Vẽ dây AC // MB. Chứng minh: $\triangle ABC$ cân.
- b) MC cắt (O) tại D. Chứng minh: $BD^2 = DA.DM$.
- c) Gọi I là trung điểm MB. Chứng minh: A, D, I thẳng hàng.

- d) Gọi E là trung điểm của CD. Chứng minh: M, A, E, O, B cùng thuộc một đường tròn.
- e) Chứng minh: EM là phân giác của góc AEB.
- f) AE cắt (O) tại F. Chứng minh: $BF \parallel CD$ và $BC^2 = BF \cdot MC$.
- g) Chứng minh: Tứ giác BDEF là hình bình hành.
- h) Chứng minh: $\triangle ADE$ và $\triangle FEC$ là tam giác cân.

Bài 4. Từ M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD.

- a) Chứng minh: $OM \perp AB$ và $MA^2 = MD \cdot MC$.
- b) Vẽ phân giác của góc DAC cắt CD tại E. Chứng minh: $\triangle AME$.
- c) Chứng minh: BE là phân giác của góc DBC.
- d) Gọi I là trung điểm của CD. Cm: IM là phân giác của góc AIB.
- e) Chứng minh: AE là phân giác của góc IAB.
- f) Chứng minh: $AD \cdot BC = ID \cdot AB$.
- g) AI cắt (O) tại K. Chứng minh: $BK \parallel CD$.
- h) AE cắt (O) tại F. Chứng minh: I, O, F thẳng hàng.

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Vẽ phân giác AE của $\triangle ABC$.

- a) Vẽ tiếp tuyến tại A cắt BC tại M. Chứng minh: $\triangle MAE$ cân.
- b) Vẽ tiếp tuyến MD. Chứng minh: DE là phân giác của góc BDC.
- c) AE cắt (O) tại F, OF cắt BC tại H. Chứng minh: HM là phân giác của góc AHD.
- d) Chứng minh: E là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AHD$.

e) Chứng minh: $BD.AC = AD.HC$.

f) DH cắt (O) tại I. Chứng minh: $AI \parallel BC$.

V. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN – GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

Định lí 1

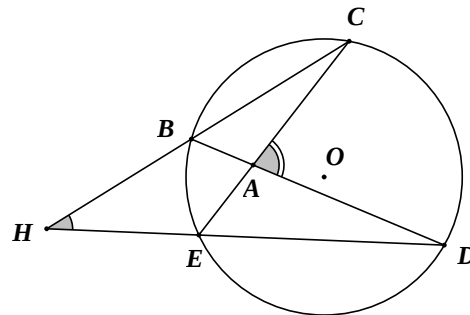
Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

Ta có: $\angle CAD = \frac{sđCD + sđBE}{2}$ (góc có đỉnh ở trong đường tròn)

Định lí 2

Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

Ta có: $\angle CHD = \frac{sđCD - sđBE}{2}$



Ví dụ 1: Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Vẽ phân giác trong AD của góc A ($D \neq (O)$). Lấy điểm E thuộc cung nhỏ AC. Nối BE cắt AD và AC lần lượt tại I và K, nối DE cắt AC tại J. Chứng minh rằng:

a) $\angle BID = \angle AJE$.

b) $AI \cdot JK = IK \cdot EJ$.

Hướng dẫn

a) Ta có $\angle BID$ là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn (O) chắn hai cung BD và cung AE

$$\angle BID = \frac{1}{2}(\text{sđ} BD + \text{sđ} AE)$$

$\angle AJE$ là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn (O) chắn hai cung CD và AE

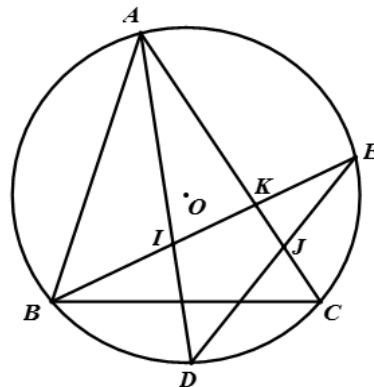
$$\angle AJE = \frac{1}{2}(\text{sđ} CD + \text{sđ} AE)$$

Mà AD là phân giác của góc A nên $BD = CD$

Suy ra $\angle BID = \angle AJE$

b) Xét ΔAIK và ΔEJK có:

+) $\angle AKI = \angle EKJ$ (đối đỉnh)



+) $\angle IAK = \angle KEJ$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau BD và cung CD)

Do đó $\triangle AIK \sim \triangle EJK$ (g.g)

$$\Rightarrow AI/EJ = IK/JK \Rightarrow AI \cdot JK = IK \cdot EJ$$

Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ đều nội tiếp đường tròn (O). Điểm I chuyển động trên cung nhỏ BC. AB cắt CI tại M, AC cắt BI tại N. Chứng minh rằng:

a) $BC^2 = BM \cdot CN$

b) $\angle AIN$ có số đo không đổi.

Hướng dẫn

a) Vì $\triangle ABC$ đều nên: $sđAB = sđBC = sđAC = 120^\circ$

Ta có: $\angle ANB$ là góc có đỉnh ngoài đường tròn (O) nên:

$$\angle ANB = \frac{1}{2} (sđAB - sđCI) = 60^\circ - \frac{1}{2} sđCI$$

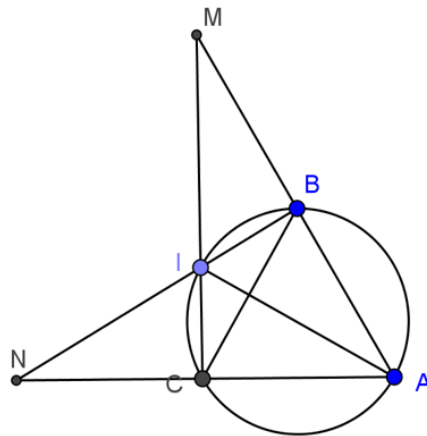
Lại có: $\angle BCI = \frac{1}{2} sđBI$ (góc nội tiếp (O) chắn cung BI)

$$= \frac{1}{2} (sđBC - sđCI) = 60^\circ - \frac{1}{2} sđCI$$

Suy ra $\angle ANB = \angle BCI$ (1)

Tương tự ta có: $\angle AMC = \angle CBI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\triangle BCM \sim \triangle CNB$ (g-g) $\Rightarrow BC/NC = BM/BC \Rightarrow BC^2 = BM \cdot NC$



b) Ta có: $\angle AIB = \angle ACB = 60^\circ$
 $\Rightarrow \angle AIN = 180^\circ - \angle AIB = 120^\circ$ không đổi

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Trên các cung nhỏ AB và AC lần lượt lấy các điểm I và K sao cho $AI = AK$. Dây IK cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E.

a) Chứng minh rằng $ADK = ACB$.

b) Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì thì tứ giác DECB là hình thang cân.

Bài 2. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Vẽ đường kính CD vuông góc với AB (D thuộc cung nhỏ AB). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm N. Các đường thẳng CN và DN lần lượt cắt đường thẳng AB tại E và F. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại N cắt đường thẳng AB tại I. Chứng minh rằng:

a) Các tam giác INE và INF là các tam giác cân.

b) $AI = \frac{AE + AF}{2}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại I và cắt đường tròn (O) lần lượt tại D và E. Dây DE cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

a) Tam giác AMN là tam giác cân.

b) Các tam giác EAI và DAI là những tam giác cân.

c) Tứ giác AMIN là hình thoi.

Bài 4. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O), ta vẽ hai tiếp tuyến MB, MC. Vẽ đường kính BD. Hai đường thẳng CD và MB cắt nhau tại A. Chứng minh rằng M là trung điểm của AB.

Bài 5. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), ta vẽ hai cát tuyến ABC và ADE (B nằm giữa A và C; D nằm giữa A và E). Cho biết $\widehat{A} = 50^\circ$, $\widehat{sdbD} = 40^\circ$. Chứng minh $CD \perp BE$.

Bài 6. Cho 4 điểm A, B, C và D theo thứ tự trên đường tròn (O) sao cho số đo các cung như sau: $\widehat{sAB} = 40^\circ$, $\widehat{sCD} = 120^\circ$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. M là giao điểm của DA và CB kéo dài. Tính các góc CID và AMB.

Bài 7. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), ta vẽ các cát tuyến MAC và MBD sao cho $\widehat{CMD} = 40^\circ$. Gọi E là giao điểm của AD và BC. Biết góc $\widehat{AEB} = 70^\circ$, tính số đo các cung AB và CD.

Bài 8. Cho đường tròn (O) và một điểm M ở ngoài (O). Vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC đi qua O (B nằm giữa M và C). Đường tròn đường kính MB cắt MA tại E. Chứng minh: $\widehat{sAnC} = \widehat{sBmA} + \widehat{sBkE}$ với $\widehat{AnC}$, $\widehat{BmA}$ và $\widehat{BkE}$ là các cung trong góc AMC.

VI. CUNG CHỨA GÓC

1. Quỹ tích cung chứa góc

Với đoạn thẳng AB và góc α ($0^0 < \alpha < 180^0$) cho trước thì quỹ tích các điểm M thỏa mãn $\angle AMB = \alpha$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB .

Chú ý:

- Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB .
- Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích.
- **Đặc biệt:** Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB .

2. Cách vẽ cung chứa góc α

- Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB .
- Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α .
- Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax . Gọi O là giao điểm của Ay với d .
- Vẽ cung AmB , tâm O , bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax .

AmB được vẽ như trên là một cung chứa góc α .

3. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thoả mãn tính chất T là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần:

- **Phần thuận:** Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H .
- **Phần đảo:** Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T .
- **Kết luận:** Quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình H .

Ví dụ: Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm trong đường tròn. Một đường thẳng d quay quanh điểm A cắt đường tròn (O) tại hai điểm M và N . Tìm quỹ tích trung điểm I của MN .

Hướng dẫn

* Phần thuận:

Vì I là trung điểm của dây MN suy ra $OI \perp MN$

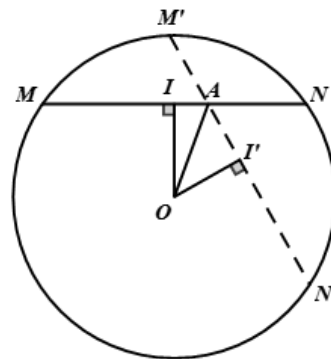
$$\Rightarrow \angle OIA = 90^\circ$$

Vì điểm I nhìn đoạn OA cố định dưới góc 90° nên I nằm trên đường tròn đường kính OA .

* Phần đảo:

Lấy điểm I' bất kỳ thuộc đường tròn đường kính OA .

Nối AI' cắt đường tròn (O) tại M' và N'



Vì I' thuộc đường tròn đường kính OA nên $\angle OI'A = 90^\circ$ hay $OI' \perp M'N'$

$\Rightarrow I'$ là trung điểm của $M'N'$ (theo quan hệ giữa đường kính và dây cung)

* Kết luận: Quỹ tích trung điểm I của MN là đường tròn đường kính OA .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ dây $MN = R$ (điểm M ở trên cung AN). Hai dây AN và BM cắt nhau tại I . Hỏi khi dây MN di động thì điểm I di động trên đường nào?

Bài 2. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một dây AC quay quanh A . Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B ta vẽ hình vuông $ACDE$. Hỏi:

a) Điểm D di động trên đường nào?

b) Điểm E di động trên đường nào?

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm E , trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho $CE = CF$. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng DE và BF . Tìm quỹ tích của điểm M khi E di động trên cạnh BC .

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB và AC ra phía ngoài tam giác. Qua A vẽ cát tuyến MAN (M thuộc nửa đường tròn đường kính AB , N thuộc nửa đường tròn đường kính AC).

a) Tứ giác $BMNC$ là hình gì?

b) Tìm quỹ tích trung điểm I của MN khi cát tuyến MAN quay quanh A .

Bài 5. Cho nửa đường tròn đường kính AB . Gọi M là điểm chính giữa của cung AB . Trên cung AM lấy

điểm N. Trên các tia AM, AN và BN lần lượt lấy các điểm C, D, E sao cho $MC = MA$, $ND = NB$, $NE = NA$. Chứng minh rằng năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BF. Từ một điểm I nằm giữa B và F, vẽ một đường thẳng song song với AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác BIN cắt đường thẳng AI tại một điểm thứ hai là D. Hai đường thẳng DN và BF cắt nhau tại E.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng năm điểm A, B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó suy ra $BE \perp CE$.

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm C di động trên (O). Gọi M là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC. Điểm M di động trên đường nào?

Bài 8. Dựng tam giác ABC biết $BC = 3cm$, $\angle A = 50^\circ$, $AB = 3,5cm$.

Bài 9. Dựng tam giác ABC biết $BC = 4cm$, đường cao $BD = 3cm$ và đường cao $CE = 3,5cm$.

VII. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

1. Định nghĩa

*Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn đgl **tứ giác nội tiếp** đường tròn.*

2. Định lí

- *Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0 .*
- *Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.*

3. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

- *Tứ giác có 4 đỉnh cách đều 1 điểm là tâm.*
- *Tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0 .*
- *Tứ giác có 2 đỉnh cùng nhìn 1 cạnh dưới 2 góc bằng nhau.*
- *Tứ giác có góc ngoài bằng góc trong đối diện.*

Chú ý: Trong các tứ giác đã học thì hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân nội tiếp được đường tròn.

Ví dụ 1: Cho ΔABC nhọn, các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $BCEF$ nội tiếp.
- $HA.HD = HB.HE = HC.HF$.

Hướng dẫn

a) Ta có $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$

$\Rightarrow$ các điểm E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC hay tứ giác BCEF nội tiếp.

b) Vẽ đường tròn đường kính BC. Xét $\triangle BHF$ và $\triangle CHE$ có:

+) $\angle EBF = \angle ECF$ (hai góc nội tiếp cùng chắn).

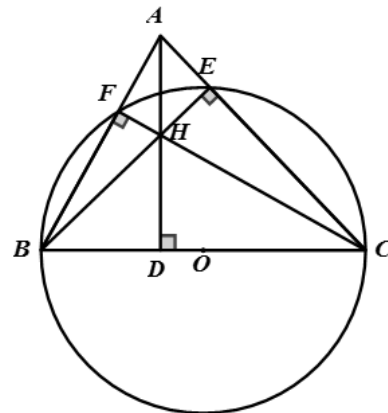
+) $\angle FHB = \angle EHC$ (đối đỉnh).

Suy ra $\triangle BHF \sim \triangle CHE$ (g.g)

$$BH/CH = HF/HE \text{ hay } HB.HE = HC.HF \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta có: $HA.HD = HB.HE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $HA.HD = HB.HE = HC.HF$.



Ví dụ 2: Cho ΔABC nhọn, đường cao AH . Các điểm M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB , AC . Chứng minh rằng:

- a) $AM \cdot AB = AN \cdot AC$.
- b) Tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

Hướng dẫn

- a) Ta có: $\angle AMH = \angle ANH = 90^\circ$ (gt)
 $\Rightarrow$ các điểm M, N cùng thuộc đường tròn đường kính AH .
 $\Rightarrow \angle AMN = \angle AHN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN)

Mặt khác: $\angle AHN = \angle ACH$

Do đó $\Delta AMN \sim \Delta ACB$ (g.g)

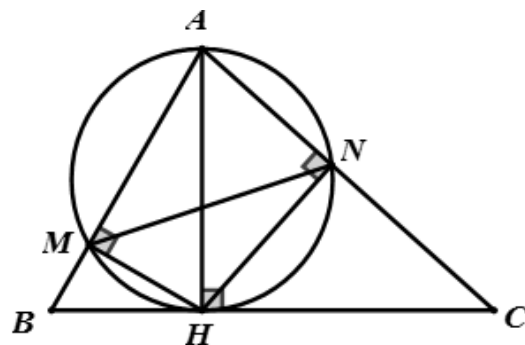
$\Rightarrow AM/AC = AN/AB$ hay $AM \cdot AB = AN \cdot AC$.

- b) Theo chứng minh câu a) ta có:

$\angle AMN = \angle ACH$

Suy ra $\angle BMN + \angle ACH = \angle BMN + \angle AMN = 180^\circ$

Vậy tứ giác $BMNC$ nội tiếp.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có đường cao BE , CF cắt nhau tại H .

- a) Chứng minh: Tứ giác $AEHF$, tứ giác $BFEC$ nội tiếp.
- b) AH cắt BC tại D . Chứng minh: Tứ giác $BFHD$, $DHEC$ nội tiếp.
- c) Chứng minh: H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.
- d) Gọi K là điểm đối xứng của H qua BC . Chứng minh: Tg $ABKC$ nội tiếp

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O) . Vẽ đường cao BE , CF cắt nhau tại H . AH cắt BC tại D .

- a) Chứng minh: Tg $BEFC$, tg $BFHD$ nội tiếp đường tròn.
- b) AD cắt đường tròn (O) tại I . Chứng minh: H đối xứng với I qua BC .
- c) Chứng minh: $OA \perp EF$.
- d) Vẽ đường kính AM của (O) . Chứng minh: Tg $BFKM$ nội tiếp.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) nội tiếp (O) đường kính BC . Vẽ đường cao AH . Trên BC lấy điểm D sau cho $HB = HD$. Từ C kẻ $CE \perp AD$ tại E .

- a) Chứng minh: Tứ giác $AHEC$ nội tiếp.
- b) Chứng minh: CB là phân giác của góc ACE .
- c) Chứng minh: $\triangle AHE$ đều.
- d) AH cắt (O) tại F . Chứng minh: C, E, F thẳng hàng.

Bài 4. Cho nửa (O) đường kính AB và điểm M nằm trên (O) ($AM > BM$). Vẽ $MH \perp AB$, C là điểm đối xứng với B qua H . Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với CM cắt tiếp tuyến Ax , By của (O) lần lượt tại D và E .

- a) Chứng minh: Tg ACMD, BCME nội tiếp đường tròn.
- b) Chứng minh: $\triangle CDE$ vuông.
- c) Vẽ $AF \parallel DE$ cắt MC tại F. Chứng minh: Tg AFHM nội tiếp.
- d) Chứng minh: $\triangle MHF$ cân.
- e) MC cắt DA tại N. Chứng minh: $NF \cdot MC = FC \cdot MN$.

Bài 5. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O).

- a) Chứng minh: $OM \perp AB$.
- b) Vẽ cát tuyến MEF. Chứng minh: $MH \cdot MO = ME \cdot MF$.
- c) Chứng minh: Tg EHOH nội tiếp đường tròn.
- d) Chứng minh: HA là phân giác của góc EHF.
- e) Vẽ AB cắt EF tại K. Chứng minh: $ME \cdot FK = EK \cdot MF$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$, vẽ (O) đường kính BC cắt AB, AC tại F, E. BE cắt CF tại H.

- a) Chứng minh: $AH \perp BC$.
- b) AH cắt BC tại D. Chứng minh: $AF \cdot BC = AE \cdot AC = AH \cdot AD$.
- c) Chứng minh: EH là tia phân giác của góc DEF.
- d) Chứng minh: Tứ giác DOEF nội tiếp.
- e) Từ A kẻ $Ax \parallel EF$ cắt BC tại M. Chứng minh: $MA^2 = MB \cdot MC$.

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Vẽ đường cao BE, CF cắt nhau tại H. AH cắt BC tại D.

- a) Chứng minh: $AD \perp BC$.

- b) Vẽ tiếp tuyến tại A cắt BC tại S. Chứng minh: $AS \parallel EF$.
- c) Vẽ đường kính AK cắt EF tại N. Chứng minh: Tg BFNK nội tiếp.
- d) Vẽ I đối xứng với H qua D. Chứng minh: I thuộc (O).

VIII. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP – ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

1. Định nghĩa

- a) Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác đgl **đường tròn ngoại tiếp** đa giác và đa giác đgl **đa giác nội tiếp** đường tròn.
- b) Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác đgl **đường tròn nội tiếp** đa giác và đa giác đgl **đa giác ngoại tiếp** đường tròn.

2. Định lí

Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

Tâm của hai đường tròn này trùng nhau và đgl **tâm** của đa giác đều.

Tâm này là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh hoặc là hai đường phân giác của hai góc.

Chú ý:

- Bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác là khoảng cách từ tâm đến đỉnh.
- Bán kính đường tròn nội tiếp đa giác là khoảng cách từ tâm O đến 1 cạnh.
- Cho n -giác đều cạnh a . Khi đó:
 - Chu vi của đa giác: $2p = na$ (p là nửa chu vi).

– Mỗi góc ở đỉnh của đa giác có số đo bằng : $\frac{(n-2).180^0}{n}$.

– Mỗi góc ở tâm của đa giác có số đo bằng: $\frac{360^0}{n}$.

– Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^0}{n}} \Rightarrow a = 2R \cdot \sin \frac{180^0}{n}$.

– Bán kính đường tròn nội tiếp: $r = \frac{a}{2 \tan \frac{180^0}{n}} \Rightarrow a = 2r \cdot \tan \frac{180^0}{n}$.

– Liên hệ giữa bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp:

$$R^2 - r^2 = \frac{a^2}{4}.$$

– Diện tích đa giác đều: $S = \frac{1}{2}nar$.

Bài 1. Một đường tròn có bán kính $R = 3cm$. Tính diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn đó.

Bài 2. Một đa giác đều nội tiếp đường tròn $(O; 2cm)$. Biết độ dài mỗi cạnh của nó là $2\sqrt{3}cm$. Tính diện tích của đa giác đều đó.

Bài 3. Cho lục giác đều ABCDEF, độ dài mỗi cạnh là a . Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M, cắt đường thẳng EF theo thứ tự tại N và P.

a) Chứng minh $\triangle MNP$ là tam giác đều.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP$.

Bài 4. Cho ngũ giác đều ABCDE cạnh a . Hai đường chéo AC và AD cắt BE lần lượt tại M và N.

a) Tính tỉ số giữa các bán kính của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đó.

b) Chứng minh rằng các tam giác AMN và CMB là các tam giác cân.

c) Chứng minh rằng $AC \cdot BM = a^2$.

Bài 5. Cho đường tròn $(O; R)$. Từ một điểm A trên đường tròn (O) vẽ các cung AB, AC sao cho $\widehat{AB} = 30^\circ$, $\widehat{AC} = 90^\circ$ (điểm A nằm trên cung BC nhỏ). Tính các cạnh và diện tích của tam giác ABC.

IX. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN – CUNG TRÒN

1. Công thức tính độ dài đường tròn (chu vi đường tròn)

Độ dài C của một đường tròn bán kính R được tính theo công thức:

$$C = 2\pi R \quad \text{hoặc} \quad C = \pi d \quad (d = 2R)$$

2. Công thức tính độ dài cung tròn

Trên đường tròn bán kính R , độ dài l của một cung n° được tính theo công thức: $l = \frac{\pi R n}{180}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho $\pi = 3,14$. Hãy điền vào các bảng sau:

Bán kính R	Đường kính d	Độ dài C	Diện tích S
5			
	6		
		94,2	
			28,26

Bài 2. Cho đường tròn (O) bán kính OA. Từ trung điểm M của OA vẽ dây $BC \perp OA$. Biết độ dài đường tròn (O) là $4\pi(cm)$. Tính:

a) Bán kính đường tròn (O).

b) Độ dài hai cung BC của đường tròn.

Bài 3. $\triangle ABC$ có $AB = AC = 3cm$, $\angle A = 120^\circ$. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Bài 4. Một tam giác đều và một hình vuông có cùng chu vi là $72cm$. Hỏi độ dài đường tròn ngoại tiếp hình nào lớn hơn? Lớn hơn bao nhiêu?

Bài 5. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại B, cắt đường tròn (O') tại C. Chứng minh rằng nếu $R' = \frac{1}{2}R$ thì độ dài của cung AC

bằng nửa độ dài của cung AB (chỉ xét các cung nhỏ AC, AB).

Bài 6. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Vẽ ra phía ngoài tứ giác này bốn nửa đường tròn có đường kính lần lượt là bốn cạnh của tứ giác. Chứng minh rằng tổng độ dài của hai nửa đường tròn có đường kính là hai cạnh đối diện bằng tổng độ dài hai nửa đường tròn kia.

Bài 7. Cho nửa đường tròn (O; $10cm$) có đường kính AB. Vẽ hai nửa đường tròn đường kính OA và OB ở trong nửa đường tròn (O; $10cm$). Tính diện tích của phần nằm giữa ba đường tròn.

Bài 8. Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC. Lấy một điểm A trên (O) sao cho $AB < AC$. Vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB và AC ở phía ngoài tam giác ABC. Chứng minh diện tích tam giác ABC bằng tổng hai diện tích của hai hình trăng khuyết ở phía ngoài (O).

X. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN – HÌNH QUẠT TRÒN

1. Công thức tính diện tích hình tròn

Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức: $S = \pi R^2$

2. Công thức tính diện tích hình quạt tròn

Diện tích hình quạt tròn bán kính R , cung n° được tính theo công thức:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ hay } S = \frac{lR}{2} \text{ (} l \text{ là độ dài cung } n^\circ \text{ của hình quạt tròn).}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Một hình vuông và một hình tròn có cùng chu vi. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn.

Bài 2. Chứng minh rằng diện tích hình tròn ngoại tiếp hình vuông bằng hai lần diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông đó.

Bài 3. Tính diện tích hình vành khăn tạo thành bởi đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh $6cm$.

Bài 4. Một tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn (O). Tính diện tích hình viên phân tạo thành bởi một cạnh của tam giác và một cung nhỏ căng cạnh đó.

Bài 5. Tam giác ABC vuông tại A, đường cao $AH = 2cm$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC có chứa

A ta vẽ ba nửa đường tròn có đường kính lần lượt là BH, CH và BC. Tính diện tích miền giới hạn bởi ba nửa đường tròn đó.

XI. ÔN TẬP CHƯƠNG III

Dạng 1. Tam giác nhọn nội tiếp.

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BD, CE cắt nhau tại H.

- Chứng minh: Tứ giác AEHD, BCDE là các tứ giác nội tiếp.
- Đường thẳng DE cắt (O) tại I, K và cắt đường thẳng BC tại M (I nằm giữa M và K). Chứng minh: $MI.MK = MB.MC$.
- Kẻ đường thẳng xy là tiếp tuyến tại A của (O). Chứng minh: $xy \parallel MK$.
- Chứng minh: $AI = AK$.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp (O; R). Vẽ BM vuông góc với AC tại M ($M \in AC$). Tia OM cắt (O) tại I. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại D.

- Chứng minh: Tứ giác OADM nội tiếp.
- Chứng minh: $DA^2 = DA.DC$.
- AI cắt BC tại N. Vẽ tiếp tuyến DE với (O) (E là tiếp điểm, E khác A). Chứng minh: D là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ANE$.
- Kẻ đường kính IF của (O). Chứng minh: 3 điểm E, N, F thẳng hàng.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp (O; R). Ba đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H.

- a) Chứng minh: Tứ giác CEHD, AEDB nội tiếp trong một đường tròn.
- b) AD cắt (O) tại I. Chứng minh: $\triangle ADC \sim \triangle BDI$ từ đó suy ra $DA \cdot DI = DB \cdot DC$.
- c) Kẻ đường kính AK của (O). Chứng minh: Tứ giác BIKC là hình thang cân.
- d) Cho $\angle BAC = 60^\circ$. Chứng minh: $\triangle AHO$ cân.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn ($AB < AC$). Đường tròn đường kính BC cắt AB tại E, cắt AC tại F.

- a) Chứng minh: CE, BF là hai đường cao của $\triangle ABC$.
- b) CE cắt BF cắt nhau tại H. Chứng minh: Tứ giác AEHF nội tiếp được.
- c) Kéo dài AH cắt BC tại M. Gọi K là giao điểm của EM và BH. Chứng minh: $BK \cdot HF = BF \cdot HK$.
- d) Chứng minh: $\angle KEO = \angle OFM$.

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn. Hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H.

- a) Chứng minh: Tứ giác CHDE, ABDE nội tiếp.
- b) Kéo dài AD và BE cắt đường tròn (O) tại F và I. Chứng minh: $IF \parallel DE$.
- c) Đường kính CK của (O) cắt AF tại J. Đường thẳng CK và AI cắt nhau tại M. Chứng minh: $KM \cdot CJ = CM \cdot KJ$.
- d) Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh 3 điểm H, G, O thẳng hàng.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp (O). Gọi H là giao điểm của 3 đường cao AD, BE, CF.

- a) Chứng minh: Tứ giác DHEC, BFEC nội tiếp.
- b) Chứng minh: $AE \cdot AC = AH \cdot AD$.

- c) Gọi K là trung điểm của HC. Chứng minh: $FED = FKD$.
- d) Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) tại M. Chứng minh: AM, EF, BC đồng qui.

Bài 7. Cho $\triangle DEF$ nội tiếp đường tròn (O). Qua D vẽ tiếp tuyến xy. Từ E vẽ $EN \parallel xy$ ($N \in DF$).

- a) Chứng minh: $DEN = DFE$.
- b) Chứng minh: $DN \cdot DF = DE^2$.
- c) Tia EN cắt (O) tại K. Chứng minh: DO là tia phân giác góc EDK.
- d) Chứng minh: DE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle NEF$.

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp (O; R) sao cho $\angle BAC = 60^\circ$. Hai đường cao AM và BN của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H. Gọi CD là đường kính của (O).

- a) Chứng minh: Tứ giác CHNM, ANMB nội tiếp.
- b) Chứng minh: $DB \parallel AH$. Từ đó suy ra tứ giác ADHB là hình bình hành.
- c) Qua C kẻ tiếp tuyến Cx với đường tròn (O). Chứng minh: $Cx \parallel MN$.
- d) Tính AH theo R.

Bài 9. Cho nửa đường tròn đường kính AB và hai điểm C, D nằm trên nửa đường tròn ($C \in AD$). Hai tia AD và BC cắt nhau tại điểm E, AC cắt BC tại F, EF cắt AB tại M.

- a) Chứng minh: $BC \perp AF$ và $AD \perp BF$. Từ đó suy ra: $FM \perp AB$.
- b) Chứng minh: Tứ giác ACEM nội tiếp. Suy ra: $ECM = EAM$.
- c) Chứng minh: CB là tia phân giác của góc MCD.

d) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh: Tứ giác CDIM nội tiếp.

Bài 10. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O; R). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác AFHE, BCEF nội tiếp.

b) Chứng minh: $AE.AC = AF.AB$.

c) AD cắt (O) tại I. Chứng minh: $\angle HBC = \angle IBC$. Từ đó suy ra I và H đối xứng với nhau qua BC.

d) Chứng minh: $AO \perp EF$.

Bài 11. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O; R). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt cạnh BC kéo dài tại S.

a) Chứng minh: $SA^2 = SB.SC$.

b) Vẽ hai đường cao BE và CF của $\triangle ABC$. Chứng minh: Tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn, xác định tâm của đường tròn này.

c) Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Chứng minh: $ME.MF = MB.MC$.

d) Chứng minh: $OA \perp ME$.

e) Vẽ tiếp tuyến SD của (O) với D là tiếp điểm. Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh: IS là phân giác của góc AID.

Bài 12. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp trong đường tròn (O; R). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Tia AD cắt (O) tại M.

a) Chứng minh: Tứ giác AEHF, BCEF nội tiếp được.

b) Chứng minh: $DA \cdot DM = DB \cdot DC$.

c) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và BC. Chứng minh: 4 điểm D, J, E, F cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính đường tròn này theo R.

d) Gọi K là giao điểm của EF và AH. Chứng minh: $CK \perp BI$.

Bài 13. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn ($AB < AC$), ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác CEHD nội tiếp.

b) Chứng minh: $\angle FEB = \angle FCB$.

c) Gọi M là một điểm trên đoạn DF. Trên tia DE lấy điểm N sao cho $\angle MAN = \angle BAC$. Chứng minh: $\angle NDC = \angle NAM$.

d) Chứng minh: MA là tia phân giác của góc NMF.

Bài 14. (HKII) Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O; R). Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại E. AE cắt đường tròn (O) ở D (D khác A).

a) Chứng minh: Tứ giác OBEC nội tiếp.

b) Từ E kẻ đường thẳng (d) song song với tiếp tuyến tại A của (O), (d) cắt AB, AC lần lượt ở P và Q. Chứng minh: $AB \cdot AP = AD \cdot AE$.

c) Chứng minh: $EP = EQ$ và $\angle PAE = \angle MAC$.

d) Chứng minh: $MA \cdot MD = \frac{BC^2}{4}$.

Bài 15. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp $(O; R)$ có $(AB < AC)$. Gọi M là điểm chính giữa cung BC . OM cắt BC tại D , AM cắt BC tại K .

- a) Chứng minh: AM là tia phân giác của góc BAC .
- b) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại S . Chứng minh: $SA^2 = SB.SC$.
- c) Chứng minh: $SA = SK$ và S, A, O, D cùng thuộc một đường tròn.
- d) Trên đường tròn tâm O đặt E sao cho $SB.SC = SE^2$. Chứng minh: điểm E nằm trên đường tròn ngoại tiếp $SAOD$.

Bài 16. Các đường cao AN và BM của $\triangle ABC$ có ba góc nhọn cắt nhau tại H và cắt đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp $\triangle ABC$ lần lượt tại D và E .

- a) Chứng minh: $CD = CE$.
- b) Chứng minh: H và D đối xứng nhau qua BC .
- c) Chứng minh: $MN \parallel DE$.
- d) Biết $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$. Tính MN theo R .

Bài 17. Cho $\triangle ABC$ nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

- a) Chứng minh: $EH.BD = ED.HF$.
- b) Chứng minh: $OA \perp EF$.

c) Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) ở M và N (F nằm giữa E và M). Chứng minh: AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MDH$.

d) Giả sử $EF = R$. Tính số đo góc BAC.

Bài 18. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp trong (O; R). Vẽ BD vuông góc với AC tại D, vẽ CE vuông góc với AB tại E, BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AOK.

a) Chứng minh: Tứ giác BKHC là hình bình hành.

b) Chứng minh: Tứ giác BCDE nội tiếp đường tròn tâm I. Xác định vị trí điểm I.

c) Chứng minh: $DE \perp AK$.

d) Cho $\angle BAC = 60^\circ$. Tính theo R độ dài AH.

Bài 19. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E tại D. CE cắt BD tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác ADHE nội tiếp được.

b) AH cắt BC tại F. Chứng minh: FA là tia phân giác góc DFE.

c) EF cắt đường tròn tại K (K khác E). Chứng minh: $DK \parallel AF$.

d) Cho biết $\angle BCD = 45^\circ$ và $\angle BCE = 15^\circ$, $BC = 4\text{cm}$. Tính $S_{\triangle ABC}$.

Bài 20. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn, $AB > AC$, nội tiếp đường tròn (O; R). Hai đường cao AD và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác BDHF nội tiếp được. Xác định tâm của đường tròn này.

b) Tia BH cắt AC tại E. Chứng minh: $HE \cdot HB = HF \cdot HC$.

c) Vẽ đường kính AK của (O). Chứng minh: $AK \perp EF$.

d) Trường hợp $\angle KBC = 45^\circ$ và $BC = R\sqrt{3}$. Tính $S_{\triangle AHK}$ theo R.

Bài 21. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn và $AB < AC$. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB và AC theo thứ tự tại D và E.

a) Chứng minh: $AD.AC = AE.AB$.

b) Gọi H là giao điểm của BD và CE. Gọi K là giao điểm của AH và BC.

Chứng minh: $AH \perp BC$.

c) Từ A kẻ các tiếp tuyến AM và AN đến đường tròn (O) với M, N là các tiếp điểm.

Chứng minh: $ANM = AKN$.

d) Chứng minh: 3 điểm M, H, N thẳng hàng.

Bài 22. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O; R) với ($AB < AC$). Kẻ 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác AEHF, BCEF là các tứ giác nội tiếp.

b) Kẻ đường kính AK của (O). Chứng minh: $AB.AC = AD.AK$.

c) Đường thẳng AD cắt (O) tại I (I khác A). Chứng minh: Tứ giác BCKI là hình thang cân.

d) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh: $AH = 2OM$.

Bài 23. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn và đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác BCEF, AEHF là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $EH.EB = EA.EC$.

c) Chứng minh: H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.

d) Cho $AD = 5\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$, $BD = 3\text{cm}$. Tính diện tích $\triangle BHC$.

Bài 24. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp (O; R). Kẻ đường cao BD của $\triangle ABC$, BD cắt (O) tại M. Kẻ MH vuông góc BC tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác MDHC nội tiếp.

b) Chứng minh: MB là tia phân giác của góc AMH.

c) HD cắt AB tại N. Chứng minh: $MN \perp AB$.

d) Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với OA, đường thẳng này cắt AB tại K.

Chứng minh: $CK \parallel MN$.

Bài 25. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn và $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AD và đường kính AK, Gọi E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ B và C xuống đường kính AK.

a) Chứng minh: Tứ giác AEDB nội tiếp.

b) Chứng minh: $DB \cdot AK = AB \cdot KC$.

c) Chứng minh: $DE \perp AC$.

d) Chứng minh: $DF \parallel BK$.

Bài 26. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn ($AB < AC$). Đường tròn đường kính BC cắt AB, AC theo thứ tự tại E và F. Biết BF cắt CE tại H và AH cắt BC tại D.

a) Chứng minh: Tứ giác AEHF nội tiếp và AH vuông góc với BC.

b) Chứng minh: $AB \cdot AE = AC \cdot AF$.

c) Chứng minh: H là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle DEF$.

d) Đường tròn (AEHF) cắt DF tại M. Chứng minh: $EM \parallel BC$.

Bài 27. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Từ một điểm M thuộc cung nhỏ AC vẽ MH vuông góc với AC tại H, MI vuông góc với AB tại I, MK vuông góc với BC tại K.

a) Chứng minh: Tứ giác AIMH và CMHK nội tiếp.

b) Chứng minh: 3 điểm I, H, K thẳng hàng.

c) Chứng minh: $MA \cdot MK = MH \cdot MB$.

d) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và HK. Chứng minh: $\angle MEF = 90^\circ$

Bài 28. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn, đường tròn (O) đường kính $BC = 2R$ cắt AB và AC lần lượt tại D và E, BE cắt CD tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác ADHE nội tiếp và AH vuông góc với BC.

b) AH cắt BC tại F. Chứng minh: FA là tia phân giác của góc DFE.

c) DF cắt BH tại I. Chứng minh: $BI \cdot HE = BE \cdot HI$.

d) Cho biết $\angle BCD = 30^\circ$, $\angle BCE = 45^\circ$. Tính diện tích $\triangle ABC$ theo R.

Bài 29. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R). Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác BEDC nội tiếp. Xác định tâm I.

b) Chứng minh: $AE \cdot AB = AD \cdot AC$ và $DA \cdot DC = DH \cdot DB$.

c) Vẽ phân giác của góc BAC cắt BC tại F, cắt (O) tại M. Chứng minh: $AH \parallel OM$.

d) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại K. Chứng minh: $KF^2 = KB \cdot KC$.

e) Đường thẳng DE cắt KC tại N. Chứng minh: $CN \cdot AK = CK \cdot ND$.

f) Cho $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$. Tính AD và AC theo R.

Bài 30. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp (O; R). Tiếp tuyến tại A cắt đường thẳng BC tại N. Gọi M là trung điểm của CB.

a) Chứng minh: Tứ giác NAOM nội tiếp. Xác định tâm I.

b) Đường tròn (I) cắt (O) tại D. Chứng minh: $\triangle AND$ cân.

c) AD cắt BC tại K. Chứng minh: $NA^2 = NM \cdot NK$.

d) Chứng minh: $NB \cdot NC = NL \cdot NM$.

e) AD cắt NO tại E. Chứng minh: Tứ giác BEOC nội tiếp.

f) Cho $\angle BAC = 60^\circ$. Chứng tỏ: Tâm F của đường tròn (BEOC) thuộc (O; R).

Bài 31. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O; R). Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác BEDC nội tiếp và xác định tâm K của đường tròn.

b) Chứng minh: $OA \perp DE$.

c) Đường thẳng DE cắt đường tròn (O) tại M và N, cắt đường thẳng BC tại F (D nằm giữa E và M).

Chứng minh: $FE \cdot FD = FN \cdot FM$.

d) Tính diện tích đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHC$ theo R.

Bài 32. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp (O; R). Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác BFEC nội tiếp. Xác định tâm I của đường tròn đó.

b) Hai tia BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N.

Chứng minh: $OA \perp MN$ và $EF \parallel MN$.

c) Gọi D là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh: D thuộc đường tròn (O).

d) Chứng minh: Diện tích $\triangle AHI$ bằng hai lần diện tích $\triangle AOI$.

Bài 33. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O) có 3 đường cao AD, BE và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác AEHF và BFEC nội tiếp.

b) Tia AD cắt (O) tại K. Chứng minh: $DA \cdot DK = DB \cdot DC$ và $DH = DK$.

c) Gọi I là trung điểm của BC, M là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh: AM là đường kính của (O).

d) Các tia BE và CF cắt (O) lần lượt tại P và Q. Gọi R là giao điểm của KQ và AB, S là giao điểm của KP và AC. Chứng minh: R, H, S thẳng hàng.

Bài 34. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($B > C$) nội tiếp (O). Lấy điểm M tùy ý trên cung nhỏ AC

($AM < MC$). Gọi H, K và I lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB, BC và CA.

a) Chứng minh: Tứ giác AHMI và MIKC nội tiếp.

b) MK cắt AC tại N. Chứng minh: $NI \cdot NM = NK \cdot NM$.

c) Chứng minh: $\angle MAH = \angle MCB$. Suy ra: H, I, K thẳng hàng.

d) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và IK. Chứng minh: $\triangle MFE$ vuông.

Dạng 2. Điểm nằm ngoài đường tròn.

Bài 1. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

a) Chứng minh: Tứ giác ABOC nội tiếp.

b) Từ A vẽ cát tuyến ADE không qua tâm (D nằm giữa A và E). Chứng minh: $AB^2 = AE.AD$.

c) Phân giác của góc EBD cắt ED tại K. Chứng minh: $AB = AK$.

d) Chứng minh: CK là phân giác của góc ECD.

Bài 2. Cho một điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Qua A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN (M, N là hai tiếp điểm) và kẻ cát tuyến AEF với (O), (E nằm giữa A và F). Gọi H là giao điểm của OA và MN.

a) Chứng minh: $OA \perp MN$.

b) Chứng minh: Tứ giác OMAN nội tiếp đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn này.

c) Chứng minh: $AM^2 = AE.AF$.

d) Đường tròn (I) cắt AF ở D, đoạn thẳng MN và EF cắt nhau ở K.

Chứng minh: $AK.AD = AH.AO$.

Bài 3. Từ A bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Chứng minh: Tứ giác ABOC nội tiếp và $OA \perp BC$ tại H.

b) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Chứng minh: $DC \parallel OA$.

c) AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E. Chứng minh: $HE \perp CE$.

d) CE cắt AO tại I. Chứng minh: I là trung điểm của AH.

Bài 4. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O; R), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (O) (với A, B là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh: Tứ giác MAOB nội tiếp.

b) Gọi K là trung điểm của AB. Chứng minh: MO là đường trung trực của AB. Suy ra 3 điểm M, K, O thẳng hàng.

c) Trên tia đối của tia BA lấy điểm I. Từ M hạ MH vuông góc với OI tại H, MH cắt AB tại N. Chứng tỏ: 5 điểm A, O, H, B, M cùng thuộc một đường tròn. Suy ra: $IA \cdot IB = IH \cdot IO$.

d) Tính $KN \cdot KI$ theo R nếu $OM = 3R$.

Bài 5. Từ một điểm A ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến Ab, AC với đường tròn.

a) Chứng minh: Tứ giác ABOC nội tiếp.

b) Vẽ dây BD // AC, AD cắt (O) tại E (E khác D). Chứng minh: $AB^2 = AE \cdot AD$.

c) Chứng minh: BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACE$.

d) Tìm vị trí của A để $CE \perp AB$.

Bài 6. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O) với B và A là các tiếp điểm. Kẻ dây AE // MB. Đường thẳng ME cắt (O) tại N, đường thẳng AN cắt MB tại I.

a) Chứng minh: Tứ giác MAOB nội tiếp.

b) Chứng minh: $\triangle IMN \sim \triangle IAM$. Từ đó suy ra: $IM = IB$.

c) Cho D là trung điểm của MA. Gọi Q là giao điểm của DB với IA. Chứng minh: Q thuộc OM và tứ giác OBQN nội tiếp.

d) Đường thẳng OI cắt (O) tại C. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt tia OB tại F. Đường thẳng vuông góc với CF tại F cắt tia MB tại K. Đặt $\angle IOB = \alpha^0$. Tính FK theo R và α .

e) Muốn $FK = 2R$ thì góc α phải bằng bao nhiêu độ?

Bài 7. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O) sao cho $OA = 3R$. Vẽ các tiếp tuyến AB và AC với (O) (B và C là các tiếp điểm).

a) Chứng minh: Tứ giác OBAC nội tiếp được.

b) Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt (O) tại D (D khác B). Đường thẳng AD cắt (O) ở E (E khác D). Chứng minh: $AB^2 = AE.AD$.

c) Chứng minh: Tia đối của tia EC là tia phân giác của góc BEA.

d) Tính diện tích tam giác BDC theo R.

Bài 8. Qua đường tròn (O; R) và một điểm A ở ngoài đường tròn với $OA = 3R$. Qua A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) với B và C là các tiếp điểm.

a) Chứng minh: Tứ giác ABOC là tứ giác nội tiếp.

b) Kẻ đường kính CD của (O). Chứng minh: $BD \parallel OA$.

c) Kẻ dây BN của (O) song song với AC. AN cắt (O) ở M. Chứng minh: $MC^2 = MA.MB$.

d) Gọi F là giao điểm của BN với CD. Tính S_{BCF} theo R.

Bài 9. Cho (O; R) đường kính AB, trên tiếp tuyến tại A của (O) lấy điểm M. Từ M kẻ tiếp tuyến MC đến (O) (C khác A). MB cắt (O) tại K.

a) Chứng minh: $OM \perp AC$ tại H.

b) Chứng minh: Tứ giác AHKM nội tiếp đường tròn.

c) Chứng minh: $KH \perp KC$.

d) Chứng minh: Tứ giác OHKB nội tiếp đường tròn.

Bài 10. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh: Tứ giác ABOC là tứ giác nội tiếp.

b) Vẽ cát tuyến ADE với đường tròn ($AD < AE$). Chứng minh: $AD.AE = AB^2$.

c) AO cắt BC tại H. Chứng minh: Tứ giác DHOE nội tiếp.

d) Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADH. Chứng minh: TD là tiếp tuyến của (O).

Bài 11. Cho đường tròn tâm O có bán kính R và một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) cách tâm O một khoảng bằng 2R. Vẽ đường thẳng d vuông góc với OA tại A. Từ một điểm M trên d vẽ hai tiếp tuyến MD, ME đến đường tròn (O) với D, E là hai tiếp điểm.

a) Chứng minh: Tứ giác MDOE là tứ giác nội tiếp và 5 điểm M, A, D, E, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng DE cắt OM tại O và cắt OA tại B. Chứng minh: $OB.OA = OM.ON$. Suy ra độ dài OB không đổi khi M di động trên đường thẳng d.

c) Cho $MA = \frac{3R}{2}$. Tính diện tích tứ giác ABNM theo R.

Bài 12. Cho đường tròn (O; R) và điểm A nằm ngoài (O) sao cho $OA = 2R$. Vẽ tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) (B, C là tiếp điểm). OA cắt BC tại I.

a) Chứng minh: Tứ giác OBAC nội tiếp.

b) Chứng minh: $IA.IO = IB.IC$.

c) Tính diện tích tứ giác OABC theo R.

d) Cho H là trung điểm của BI. Qua H dựng đường thẳng d vuông góc với OH. Gọi D là giao điểm của d với AB. Tính chu vi $\triangle DOA$ theo R.

Bài 13. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O; R) vẽ tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) với B, C là các tiếp điểm.

a) Chứng minh: $OA \perp BC$ tại H và các tứ giác OBAC nội tiếp.

b) Từ A vẽ cát tuyến ADE (không qua tâm O) cắt (O) tại D và E (D nằm giữa A và E). Chứng minh: $AD \cdot AE = AB^2$.

c) Vẽ dây cung BM song song với DE. Gọi giao điểm của CM và DE là I. Chứng minh: I là trung điểm của DE.

d) BC cắt ED tại S. Chứng minh: $\frac{SD}{AD} = \frac{SI}{EI}$.

Bài 14. Từ điểm A ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm). Vẽ đường kính BD của (O).

a) Chứng minh: Tứ giác ABOC nội tiếp.

b) AD cắt (O) tại E. Chứng minh: $AB^2 = AE \cdot AD$.

c) Vẽ dây BF song song với ED. CF cắt AD tại I. Chứng minh: Tứ giác ABOI nội tiếp đường tròn.

d) OA cắt BC tại H. CF cắt DH tại M. Chứng minh: $MH = MD$.

Bài 15. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB và AC với (O) (B, C là tiếp điểm).

a) Chứng minh: Tứ giác ABOC nội tiếp.

b) Vẽ cát tuyến ADE với (O) ($AD < AE$). Chứng minh: $AD.AE = AB^2$.

c) AO cắt BC ở H. Chứng minh: Tứ giác DHOE nội tiếp.

d) Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADH$. Chứng minh: TD là tiếp tuyến của (O).

Bài 16. Cho (O; R) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB đến (O). (A và B là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh: Tứ giác MAOB nội tiếp.

b) Kẻ đường kính BC, MC cắt (O) tại N (N khác C). Chứng minh: $MA^2 = MN.MC$.

c) Gọi I là trung điểm của NC. Chứng minh: MI là đường phân giác của góc AIB.

d) Gọi H là giao điểm của AB và MO, K là trung điểm của MH. Chứng minh: K thuộc AN.

Bài 17. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Qua A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN (M, N là hai tiếp điểm) và cát tuyến AEF với (O) (E nằm giữa A và F). OA cắt MN tại H.

a) Chứng minh: $OA \perp MN$.

b) Chứng minh: Tứ giác OAMN nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn này.

c) Chứng minh: $AM^2 = AE.AF$.

d) Đường tròn (I) cắt AF ở D, đoạn thẳng MN và EF cắt nhau ở K. Chứng minh: $AK.AD = AH.AO$.

Bài 18. Từ M nằm ngoài đường tròn (O; R) kẻ hai tiếp tuyến MA và MB, cát tuyến MCD. Gọi H là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh: Tứ giác MAOB nội tiếp và $OM \perp AB$ tại H.

b) Chứng minh: $MA^2 = MC.MD$.

c) Chứng minh: $MHC = OCD$.

d) Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Chứng minh: $CE = EF$.

Bài 19. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến (O) (B, C là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh: Tứ giác OBAC nội tiếp.

b) Kẻ cát tuyến AMN (M nằm giữa A và N). Chứng minh: $AB^2 = AM.AN$.

c) Gọi H là giao điểm của OA và BC. Chứng minh: Tứ giác OHMN nội tiếp.

d) Hai tiếp tuyến tại M và N cắt nhau tại K. Chứng minh: K, B, C thẳng hàng.

Bài 20. Từ A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là hai tiếp điểm) của (O). Cát tuyến ADE (không qua tâm O, D nằm giữa A và E). Gọi I là trung điểm của ED, OA cắt BC tại H.

a) Chứng minh: $OH \perp BC$ tại H.

b) Chứng minh: 5 điểm A, B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh: Tứ giác OHDE nội tiếp.

d) Đường thẳng qua D vuông góc với OB cắt BC tại M và cắt EB tại K.

Chứng minh: $MK = MD$.

Bài 21. Cho đường tròn (O) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Từ A vẽ tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh: $OA \perp BC$.

- b) Vẽ cát tuyến AMN của đường tròn (O) (M nằm giữa A và N). Gọi E là trung điểm của MN. Chứng minh: A, O, E, C cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm K của đường tròn.
- c) Tia CE cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh: $BI \parallel MN$.
- d) Tìm vị trí của cát tuyến AMN để diện tích $\triangle AIN$ lớn nhất.

Dạng 3. Dạng khác.

Bài 1. Cho nửa đường tròn đường kính AB, M thuộc cung AB, C thuộc OA. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm M kẻ tiếp tuyến Ax, By với đường tròn. Đường thẳng qua M và vuông góc với MC cắt Ax, By tại P và Q. AM cắt CP tại E, BM cắt CQ tại F.

- a) Chứng minh: Tứ giác APMC, EMFC nội tiếp.
- b) Chứng minh: $EF \parallel BC$.
- c) Tìm vị trí của C để tứ giác AEFC là hình bình hành.
- d) Cho $EC \cdot EP = FC \cdot FQ$. Chứng minh: $EC = FQ$ và $EP = FC$.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và có đường cao AH. Vẽ đường tròn đường kính AH, đường tròn này cắt AB tại điểm E và cắt AC tại điểm F.

- a) Chứng minh: Tứ giác AEFH là hình chữ nhật.
- b) Chứng minh: Tứ giác BEFC là một tứ giác nội tiếp.
- c) Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh: $AI \perp EF$.
- d) Cho $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$. Tính diện tích tứ giác IEAF.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Biết $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Vẽ đường cao AH. Đường tròn tâm O đường kính AH cắt AB tại điểm E và cắt AC tại điểm F.

- a) Chứng minh: Tứ giác AEHF là hình chữ nhật.
- b) Chứng minh: Tứ giác BEFC nội tiếp được.
- c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh: $AI \perp EF$.
- d) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BEFC. Tính diện tích hình tròn tâm K.

Bài 4. Trên (O) đường kính AB lấy điểm C sao cho $CA < CB$. Trên đoạn AB lấy điểm D sao cho $DA > DB$. Đường thẳng vuông góc với AB tại D lần lượt cắt BC, AC tại H và K.

- a) Chứng minh: Tứ giác ACHD nội tiếp đường tròn.
- b) Chứng minh: $DA.DB = DH.DK$.
- c) Tia AH cắt (O) ở E. Chứng minh: 3 điểm K, E, B thẳng hàng.
- d) Vẽ tiếp tuyến KF của (O) (F là tiếp điểm). Chứng minh: FH vuông góc với KO.

Bài 5. Cho (O; R) đường kính BC, lấy điểm A thuộc (O) ($AB < AC$). Vẽ đường cao AH và đường phân giác BD của $\triangle ABC$. Kẻ AK vuông góc với BD tại K và cắt BC tại E.

- a) Chứng minh: Tứ giác ABHK nội tiếp.
- b) Chứng minh: Tứ giác CHKD nội tiếp.
- c) Chứng minh: $BH.BC = BK.BD$.
- d) Cho $BH = 6\text{cm}$, $AE = 4\sqrt{5}\text{ cm}$. Tính diện tích $\triangle ABC$.

Bài 6. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 8$. Gọi Ax, By lần lượt là tiếp tuyến tại A, B của (O). Qua M thuộc (O) vẽ tiếp tuyến thứ 3 cắt Ax, By tại C và D ($AC > BC$).

- Chứng minh: Tứ giác OACM, OBDM nội tiếp đường tròn.
- OC cắt AM tại E, OD cắt BM tại F. Tứ giác OEMF là hình gì?
- Gọi I là trung điểm của OC và K là trung điểm của OD. Chứng minh: OIMK nội tiếp.
- Cho $AC + BD = 10$. Tính diện tích tứ giác OIMK.

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Từ A vẽ tiếp tuyến Ax với (O). Trên tia Ax lấy điểm C sao cho $AC = 2R$. Qua C vẽ đường thẳng cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa C và E, đường thẳng này cắt đoạn OB). Gọi H là trung điểm đoạn thẳng DE.

- Chứng minh: $CA^2 = CD.CE$.
- Chứng minh: Tứ giác AOHC nội tiếp.
- Đoạn thẳng CB cắt đường tròn (O) tại K. Tính số đo góc AOK và diện tích hình quạt AOK theo R và O.
- Đường thẳng CO cắt tia BD, tia BE lần lượt tại M và N. Chứng minh: O là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC và đường tròn tâm K đường kính AH. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của đường tròn (K) với AB, AC và với (O).

- Chứng minh: Tứ giác ADHE là hình chữ nhật.

- b) Chứng minh: $AD \cdot AB = AE \cdot AC$ và tứ giác BDEC nội tiếp.
 c) Gọi I là giao điểm của DE và BC. Chứng minh: $AO \perp DE$.
 d) Chứng minh: 3 điểm I, F, A thẳng hàng và tứ giác IFEC nội tiếp.

e) Nếu $BC = 2R$ và $AH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác BDEC và diện tích hình

viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BDEC của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BDEC theo R.

Bài 9. Cho hai đường tròn (O) và (I) tiếp xúc nhau tại A. Một đường thẳng d quay quanh A (d khác đường thẳng OI) cắt (O) và (I) tại B và C.

- a) Chứng minh: $OB \parallel IC$.
 b) Vẽ đường kính BD và CE của (O) và (I). Chứng minh: A, D, E thẳng hàng.
 c) Tiếp tuyến tại C của đường tròn (I) cắt BD tại F. Chứng minh: Tứ giác DACF nội tiếp.
 d) Khi d quay quanh A thì K di động trên đường tròn?

Bài 10. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$) đường cao AH. Vẽ đường tròn tam B bán kính BA cắt AH tại D.

- a) Chứng minh: BC là trung trực của AD. Suy ra CD là tiếp tuyến của (B).
 b) Gọi I là điểm đối xứng của B qua AH. Đường thẳng AI cắt CD tại E. Chứng minh: Tứ giác AHEC nội tiếp.
 c) Gọi F là hình chiếu của A lên BD. Chứng minh: $DB \cdot DF = DE \cdot DC$ suy ra tứ giác CEBF nội tiếp.
 d) Cho $AB = a$, $AC = 2a$. Tính S_{DEH} theo a.

Bài 11. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ đường kính CD (không vuông góc với AB). AC và AD cắt tiếp tuyến tại B của (O) tại M và N. Gọi I là trung điểm của AD.

a) Chứng minh: Tứ giác OINB nội tiếp.

b) Chứng minh: $AI \cdot AN = 2R^2$.

c) Chứng minh: $CDM = CNM$.

d) Gọi K là trung điểm của MN, F là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle CMN$. Tính KF theo R. Suy ra F luôn thuộc một đường thẳng cố định khi đường kính CD quay quanh O.

Bài 12. Cho hình vuông ABCD cố định. E là điểm di động trên cạnh CD (E khác C và D). Tia AE cắt đường thẳng BC tại F > Tia Ax vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng DC tại K.

a) Chứng minh: $CAF = CKF$.

b) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh: $IDF = IEF$.

c) Chứng minh: $\triangle KAF$ vuông cân.

d) Chứng minh: Khi E thay đổi trên cạnh CD đường thẳng IB đi qua một điểm cố định.

e) Gọi M là giao điểm của BD và AE. Chứng minh: Tứ giác IMCF nội tiếp.

f) Chứng minh: Khi điểm E thay đổi trên cạnh CD thì tỉ số $\frac{ID}{CF}$ không đổi. Tính tỉ số đó.

Bài 13. Cho đường tròn $(O; R)$ có dây $BC = R\sqrt{3}$. Vẽ đường tròn (M) đường kính BC . Lấy điểm A thuộc (M) (A nằm ngoài (O)). AB, AC cắt (O) tại D và E . Vẽ đường cao AH của $\triangle ABC$. AH cắt DE tại I .

- Chứng minh: $AD \cdot AB = AE \cdot AC$.
- Chứng minh: I là trung điểm của DE .
- AM cắt ED tại K . Chứng minh: Tứ giác $IKMH$ nội tiếp.
- Tính DE và tỉ số $\frac{AH}{AK}$ theo R .
- Tìm vị trí điểm A để diện tích $\triangle ADE$ lớn nhất.

Bài 14. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại 2 điểm A và B . Vẽ đường kính AB và AD của (O) và (O') . Tia CA cắt đường tròn (O') tại F , tia DA cắt đường tròn (O) tại E . CE và DF cắt nhau tại M .

- Chứng minh: $\angle EFC = \angle EDC$.
- Chứng minh: Tứ giác $EOO'F$ nội tiếp.
- Qua A kẻ đường thẳng song song với OO' cắt CE và DF lần lượt tại H và K . Chứng minh: Tứ giác $HEFK$ nội tiếp.
- Gọi I là trung điểm CE và N là điểm đối xứng của A qua I . Chứng minh: N thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle CMD$.

Bài 15. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) . M là điểm thuộc cung nhỏ AC . Vẽ MH vuông góc với BC tại H , vẽ MI vuông góc với AC tại I .

a) Chứng minh: $IHM = ICM$.

b) Vẽ đường tròn tâm D bán kính DE cắt (O) tại F, BF cắt AD tại I, BD cắt AE tại K. Chứng minh: Tứ giác AKIB nội tiếp.

c) Chứng minh: $BI.BF = BK.BD$.

d) Trung tuyến AM của $\triangle ABC$ cắt BF tại N. Chứng minh: $NA = NF$.

Bài 16. Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh là a. E là điểm tùy ý trên cạnh CD. Tia AE cắt BC tại F. Đường vuông góc với AE tại A cắt CD tại K.

a) Chứng minh: Tứ giác ACFK nội tiếp đường tròn. Xác định tâm I.

b) Tính số đo góc AFK. Suy ra $\triangle AKF$ vuông cân.

c) Tia AF cắt BI tại J. Chứng minh: Tứ giác IJCF nội tiếp được.

d) Tìm vị trí điểm E trên cạnh CD để độ dài KE nhỏ nhất. Tính độ dài KE theo a khi đó.

Bài 17. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. C là điểm chính giữa cung AB, M là điểm di động trên cung BC. AM cắt BC tại K. Vẽ CI vuông góc với AM tại I cắt AB tại D.

a) Chứng minh: Tứ giác ACIO nội tiếp. Suy ra số đo góc OID.

b) Chứng minh: OI là tia phân giác của góc COM.

c) Chứng minh: $\triangle CIO \sim \triangle CMB$. Tính tỉ số $\frac{IO}{MB}$.

d) Khi M là điểm chính giữa cung BC. Tính diện tích tứ giác ACIO theo R.

e) Nếu K là trung điểm của BC. Tính $\frac{AM}{BM}$.

Bài 18. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Người ta vẽ đường tròn tâm A bán kính nhỏ hơn AB, nó cắt đường tròn (O) tại C và D, cắt AB tại E. Trên cung nhỏ CE của (A) ta lấy điểm M. Tia BM cắt tiếp tuyến của (O) tại N.

- a) Chứng minh: BC, BD là các tiếp tuyến của (A).
- b) Chứng minh: NB là phân giác của góc CND.
- c) Chứng minh: $\triangle CNM \sim \triangle MND$.
- d) Giả sử $CN = a$, $DN = b$. Tính MN theo a và b.